



TITLE:

# $L^2$ -cohomology of singular algebraic surfaces

AUTHOR(S):

長瀬, 正義

---

CITATION:

長瀬, 正義.  $L^2$ -cohomology of singular algebraic surfaces. 数理解析  
研究所講究録 1988, 639: 141-153

ISSUE DATE:

1988-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100169>

RIGHT:

## $L^2$ -cohomology of singular algebraic surfaces

東工大・理・長瀬正義 (Masayoshi Nagase)

次のような予想がある.

予想 (Cheeger, Goresky, MacPherson [2, §4 Conjecture C]).

$X$  を射影空間  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  に埋め込まれている singular algebraic variety とする. この singularity  $S$  を  $X$  から取り除き,  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  の Fubini-Study metric を制限することにより 非完備 リーマン多様体  $(X-S, g)$  を作る. この時

$$H_{(2)}^i(X-S) \cong (IH_i(X))^*.$$

ここで  $H_{(2)}^i(X-S)$  は  $(X-S, g)$  の  $L^2$ -cohomology を,  $IH_i(X)$  は,  $X$  の intersection homology with the middle perversity  $\bar{m}$  を意味する.

(予想は  $X$  が singular curve の時は, かなり自明なことであり) このノート の目標は, 次を説明することである.

定理  $X$  が singular surface (over  $\mathbb{C}$ ) の時には  
予想は, 正しい.

この定理は、もともと Hsiang-Pati ([4]) が証明したことになっていましたが、当時からギャップがあると言われていたもので、筆者の contribution は、そのギャップを埋めた点にあります。もうすこし正確に言うと、 $X$  の singularity の “非常に良い解消”  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  を考えた時、その divisors どうしが交わらなければ、ある意味でギャップがなく交わりがあると本質的にギャップがある、というふうになっています。

予想に関しては、次のような経緯で生まれたようです。一方の旗がしら Goresky & MacPherson が、“ $X$  が singularity を持つと Poincaré duality が一般に成立しなくなってしまう simplicial homology  $H_i(X)$ ” にかえて “ $X$  が singularity を持つてもある意味で Poincaré duality の成立する intersection homology  $IH_i(X)$ ” (singularity がなければ  $H_i(X)$  に一致) なるものを提案し、一方 Cheeger が “コンパクト多様体上の Hodge 理論, スペクトラル幾何 etc.” を “非コンパクト (& 非完備) 多様体” にまで拡張するため (その道具の一つとして) “ $L^2$ -cohomology  $H_{(2)}^i$ ” (コンパクト多様体に対しては  $H_{DR}^i$  に一致する) の計算を実行していた。これらはそれぞれ独立に行なわれていたわけであるが、彼らの  $IH, H_{(2)}^i$  の計算結果を見てこれらの間の “双対関係” を指摘したのは、

D. Sullivan であったようです。(彼の見方と思われる)最も単純な場合の計算結果を紹介します。

Example 1 (Intersection homology の定義は省略: それには "i" の他に perversity  $\bar{p}$  が付随している. ここでは, その  $\bar{p}$  が (lower) middle perversity  $\bar{m}$  と呼ばれるものである時の結果である)  $N$  を  $n$  次元 (境界を持たない) コンパクト多様体とし

$$C(N) = [0,1] \times N / \{0\} \times N \text{ を一点 } p \text{ につぶす,}$$

これは一般に, その  $p$  を特異点として持つ,

とおくと,

$$(0.1) \quad IH_i(C(N)) \cong \begin{cases} H_i(N) & : i \leq \frac{n}{2} \\ 0 & : i > \frac{n}{2} \end{cases}$$

Example 2 ( $L^2$ -cohomology の定義は, 次のように: 兎角それを定義するには metric が付随していなければ始まらない.) Example 1 の  $N$  に (任意に固定した) metric  $g$  を付随させ,

$$C^*(N) = "(0,1] \times N \text{ 上で } dr^2 + r^2 g"$$

とおく (metric cone) と,

$$(0.2) \quad H_{(2)}^i(C^*(N)) \cong \begin{cases} H_{DR}^i(N) & : i \leq \frac{n}{2} \\ 0 & : i > \frac{n}{2} \end{cases}$$

(0.1) と (0.2) より  $IH_i(C(N))$  と  $H_i^b(C^*(N))$  がまさに双対関係を持つことがわかる。となると、予想 は、まさに当然の成り行きでありましょう。

§1.  $L^2$ -コホモロジー 何はともあれまず、 $L^2$ -cohomology を定義しなければならぬ。 $(Y, g)$  を (非完備) リーマン多様体とする。するとその上の微分形式  $\alpha, \beta$  どうしの内積が

$$(1.1) \quad (\alpha, \beta) = \int_Y \alpha \wedge * \beta$$

と定義される:  $*$  は metric  $g$  の定める star operator.  $\Sigma$  としてその内積の定めるノルム  $\|\alpha\|$  が有限であるような  $i$ -forms 全体を  $L^2\Lambda^i = L^2\Lambda^i(Y)$  とおく (Hilbert 空間). コンパクトな台を持つ  $C^\infty$ - $i$ -forms 全体  $\Lambda^i$  は、 $L^2\Lambda^i$  に含まれるが、 $Y$  をコンパクトと仮定していないので、一般に、 $C^\infty$ - $i$ -forms 全体  $\Lambda^i$  は、 $L^2\Lambda^i$  に含まれるとはかぎらない。さて、外微分  $d: \Lambda^* \rightarrow \Lambda^{*+1}$  を次のような空間に制限して  $d_i$  と書くことにする;

$$(1.2) \quad \text{dom } d_i = \{ \alpha \in \Lambda^i \cap L^2\Lambda^i \mid d\alpha \in L^2\Lambda^{i+1} \}.$$

するとこの  $\{\text{dom } d_i\}$  は、cochain complex をなすので、それの定める  $i$  次コホモロジーが考えられる。これを  $i$  次  $L^2$ -コホモロジーと呼ぶ;

$$(1.3) \quad H_i^b(Y) = \text{Ker } d_i / \text{Range } d_{i-1}.$$

コンパクトな場合と違って  $d_i$  の定義域が明示されている,

ひいては "metric" をかえれば我々の  $d_i$  は違う  $d_i$  になってしまうことに注意されたい. なお,  $d_i$  の operator norm に関する内積を  $\bar{d}_i$  とおくと,  $\{\text{dom } \bar{d}_i\}$  も  $\mathbb{R}$ , cochain complex を作るのどコホモロジーを考えられる. ただし, これらについては自然に同型

$$(1.4) \quad H_{\bar{d}_i}^i(Y) \cong \text{Ker } \bar{d}_i / \text{Range } \bar{d}_{i-1}$$

となることがわかっている ([1]).  $\{d_i\}$ -type,  $\{\bar{d}_i\}$ -type,  $\mathbb{R}$  or  $\mathbb{C}$  の一長一短があり必要に応じて使いわけることになる.

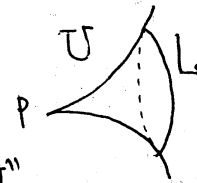
$L^2$ -コホモロジーの重要な性質を一つ紹介しておく. 一般に, 2つのリーマン多様体  $(Y_1, g_1), (Y_2, g_2)$  があった時, 両方が quasi-isometry であるとは, 微分同型  $f: Y_1 \rightarrow Y_2$  及び適当な定数  $C > 0$  があり  $C^{-1}g_1 \leq f^*g_2 \leq Cg_1$  がなりたっていることとする.

補題 1.1  $L^2$ -コホモロジーは quasi-isometric 不変である.

§2 定理の証明のアイデア 以下, 我々の  $X(P^N(\mathbb{C}))$  に埋め込まれている singular surface  $(\mathbb{C})$  を normal と仮定する. (normal でない場合には, normalization を施してから考えれば良い: ただし,  $L^2$ -cohomology の normalization 不変性は, 一般には証明されていないので "normalize (たもの

ついで言えたので non-normal についても言えた” という論法は取れない。) よって, その singularity  $S$  は孤立特異点の集合となっている.  $S = \{p\}$  と, 一点よりなっている, と仮定しておくことにする (一般には, 以下の議論を各特異点の近傍で行なえば良い.).

$p$  の近傍  $U$  を考えてみる.



$p$  の link を  $L$  (i.e.  $\partial U$ ) とおけば,

$U \cong C(L)$ ,  $L$  上の cone, なる位相同型があるので,

Example 1 より,

$$(2.1) \quad IH_i(U) \cong \begin{cases} H_i(L) & ; i \leq 1, \\ 0 & ; i \geq 2, \end{cases}$$

である. この事実より, 定理を証明するには, まず Example 2 に対応する次の結果を証明する必要があると思われる. 更に実は, それさえ証明できれば, 一般論として定理そのものが証明されたことになる (このことの詳しい説明は省略する).

$U^* = U \setminus \{p\}$  において,

命題 2.1. 次の自然な同型がある:

$$(2.2) \quad H_{(2)}^i(U^*) \cong \begin{cases} H_{\text{DR}}^i(L) & ; i \leq 1, \\ 0 & ; i \geq 2. \end{cases}$$

ここで自然な同型とは:  $H_{(2)}^i$  は  $\{d_i\}$ -type を使っているとす

る (定義をすなわに解釈して,  $U^*$  上の  $C^\infty$ -forms とは, その境界  $L$  上まで  $C^\infty$  に延びていゝものとする). すると,

$$(2.3) \quad H_{\text{DR}}^i(U^*) \ni [\phi] \mapsto [\phi|_L] \in H_{\text{DR}}^i(L)$$

が well-defined であり, 自然な同型を与えるはずの写像とはこのことである.

以下この命題を証明することが目標である. (2.2) 自身は (0.2) と全く同じであるが  $U^*$  上の metric  $g$  ( $\mathbb{P}^N$  の Fubini-Study metric の制限) が Example 2 のように単純であるはずはない. そこで補題 1.1 に注意しつつ, quasi-isometric な範囲で  $g$  を変形して, より扱いやすい metric を探し出すことが出発点となる. 実際には  $U^*$  を適当に分割し, 各部分 (with  $g$ ) と quasi-isometric な, より扱いやすいものを探し出す, という手段を取る: 結果だけを紹介すると次のようになる.

(I) まず  $U^*$  に適当な積構造を入れる: (微分同型)

$$(2.4) \quad U^* \cong (0, 1] \times L, \quad x \mapsto (r, \tilde{x}),$$

ここで  $r$  は一般に “ $p$  からの  $x$  の距離” ではない (これをいかに定義するかが重要).

(II) link  $L$  を適当に分割する:  $L = \cup Y_j$ .

(III) その分割と (2.4) をあわせて  $U^*$  自身を分割する;



$$U^* = \coprod W_j, \quad W_j \cong (0,1] \times Y_j.$$

(二) 以上を非常にうまく遂行すると, 各  $W_j$  は, 次の types のリーマン多様体  $W$  のどれかと quasi-isometric である;

Type (-):  $1 \leq c$  を固定し  $\mathbb{R}^2$  内の三角形  $\Delta$  を考え,  $\mathbb{R}^2$  の通常の計量の  $\Delta$  への制限を  $\tilde{g}$  とおく. して

$$W = W(-) = "(0,1] \times [0,1] \times \Delta (\ni (r, \theta, y)) \\ \text{with } dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^{2c} \tilde{g}(y) "$$

Type (+):  $0 < b < 1$  &  $1 \leq c$  を固定する. して,

$$W = W(+) = "(0,1] \times [0,1]^3 (\ni (r, \theta, s, \oplus)) \\ \text{with } dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^{2c} \{ ds^2 + (r^b + s)^2 d\oplus^2 \} "$$

ここで "quasi-isometry"  $I_j: W_j \cong W$  で,  $x \mapsto (r, \dots)$  の  $r$  は, (2.4) の  $r$  に一致している. 各  $W_j$  に対して, まず Type (+) のどちらかが定まり, 次に  $c$  や  $b$  が  $W_j$  に対応して定まる.

(1)-(二) をいかに遂行するかが最も本質的 (Hsiang-Pati では, Type (+) が扱われていない) であるが, それについてはこのセクションの最後に, ごくごく簡単に説明することとして, ここでは, それが遂行し得たと仮定して話を進める. 三つほど主張を与える:

主張 A.  $i \leq 1$  とし,  $\phi \in L^2 \Lambda^i(L)$  を任意に取る.  $\Sigma$  上  
 (2.4) を通して  $\phi$  を  $U^*$  上の form とみなす,  $\phi(r, \tilde{x})$   
 $= \phi(1, \tilde{x})$ , と,  $\Sigma$  上は  $L^2 \Lambda^i(U^*)$  に属する.

次に,  $\alpha = \phi + dr \wedge \omega \in L^2 \Lambda^i(U^*)$  に対して

$$(2.5) \quad (K\alpha)(r, \tilde{x}) = \begin{cases} \int_a^r \omega(r, \tilde{x}) dr & : r \leq 2, \\ \int_0^r \omega(r, \tilde{x}) dr & : r \geq 3, \end{cases}$$

とおく ( $0 < a \leq 1$  は特定していない). すると

主張 B.  $K$  は 次の連続作用素を与える;

$$K : L^2 \Lambda^i(U^*) \rightarrow L^2 \Lambda^{i-1}(U^*).$$

最後に: §1 において  $d_i, \bar{d}_i$  を定義した (定義域が込められて  
 いる). ここでは新しく, 定義域を  $\Lambda_c^i$  に制限した外微分  $d_{c,i}$   
 を考える. その肉色を  $\bar{d}_{c,i}$  と書いて

主張 C.  $i = 0, 3, 4$  の時,  $\bar{d}_{c,i} = \bar{d}_i$ .

Hsiang-Pati は,  $i = 1, 2$  も込めて, 主張 C は正しいと主張  
 している (Cheeger 氏の comment). 実際  $W(t)$  がなければ  
 “ $\bar{d}_{c,i} = \bar{d}_i$  for any  $i$ ” は, 明らか (つまり [1] とほとんど同様に  
 証明できる) である.  $W(t)$  が存在するかため, 主張 A~C の  
 証明は, [4] より, かなり複雑となる (主張 C にいたっては,

正しいはずの  $i=1, 2$  の場合を主張から省かねばならない  
はめとなる). さて, 主張  $A, B, C$  を正しいと仮定して次を得る.

系.  $\alpha = \phi + d\tau_1 \omega \in L^2 \Lambda^i(U^*)$  に関して,

(1)  $i = 0$  or  $1$  の時,  $\alpha \in \text{dom } d_i$  ならば,  $K\alpha \in \text{dom } d_{i-1}$   
であり,  $dK\alpha + Kd\alpha = \alpha - \phi(a)$  である,

(2)  $i = 3$  or  $4$  の時,  $\alpha \in \text{dom } \bar{d}_i$  ならば,  $K\alpha \in \text{dom } \bar{d}_{i-1}$   
であり,  $dK\alpha + K\bar{d}\alpha = \alpha$  である.

(1)の略証) 形式的な計算により  $dK\alpha + Kd\alpha = \alpha - \phi(a)$   
である. そして主張  $A, B$  より  $\alpha - \phi(a) - Kd\alpha (= dK\alpha)$  は  $L^2 \Lambda^i(U^*)$   
に属する. つまり  $dK\alpha \in L^2 \Lambda^i(U^*)$ ,  $K\alpha \in L^2 \Lambda^{i-1}(U^*)$  でもあるから,  
 $K\alpha \in \text{dom } d_{i-1}$  である.

(2)の略証) まず  $\alpha \in \text{dom } d_{i,i}$  に関して, (1)と同様にして(2)  
を示す. そして主張  $C$  を使い (2)が  $\alpha \in \text{dom } \bar{d}_i$  に関して成立す  
ることがわかる.

この系より命題 2.1 が  $i \neq 2$  の時, 成立する.  $i=2$  の場  
合は, 証明がかなり複雑なのでここでは省く. ごく簡単に言  
えば, 右図のように  $P$  から離れて  $V$  を取り,  
 $(U^*, V)$  に関する  $L^2$  版長完全列を  
考え,



$$(2.6) \quad H_{(2)}^2(U^*, V) = 0$$

$$H_{(2)}^2(V) \cong H_{(2)}^3(U^*, V)$$

を示すことにより、直接的に  $H_{(2)}^2(U^*) = 0$  を示す。

このようにして、命題 2.1 は、主張  $A, B, C$ , として (2.6) に帰着されたことになる。そして、お気づきのよう、ここまでは、(1)-(2) の (1) の部分のみが表に出ていた。 (1)-(2) の本質的部分 (2) が使われるのは、これから主張の証明においてである (つまり、これらが証明できる程度まで、singularity  $p$  の近くでの計量  $g$  の状態を調べあげる)。

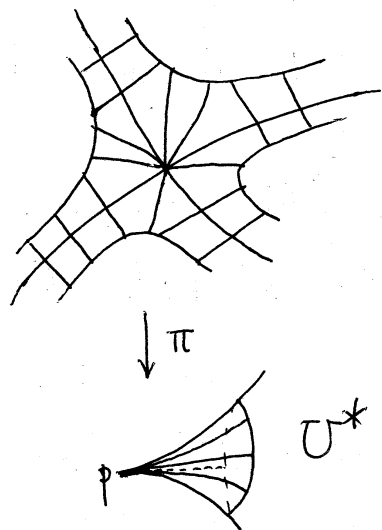
注意. 主張  $A, B$  は、[9] において Assertions  $A, B$  として証明されている。主張  $C$  は [8, Assertion A], (2.6) は [9, Assertion C], に相当する。

主張  $A, B, C$  と (2.6) の証明は割愛し、(1)-(2) をごく簡単に説明して終るをしたい。兎角  $X$  の解消といったん作り、さらに blowing-ups を必要なだけ繰り返すと次のような “非常に良い解消”  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  を作ることができる:  $\pi(p)$  の任意点のまわりの適当な座標近傍  $(U, (u, v))$  を取ると、 $\pi$  はその上で次のように書き下せる:  
 $(p = [1, 0, \dots, 0] \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$  とし、そのまわりの座標  $[\omega_0, \dots, \omega_N] \mapsto (z_1, \dots, z_N) = (\omega_1/\omega_0, \dots)$  を考える。ただし  $z_1, \dots, z_N$  の順序は無視

するとして)

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & z_1 = u^{n_1} v^{m_1}, \quad (n_1, m_1) \neq (0, 0), \\
 & z_2 = f_2(z_1) + u^{n_2} v^{m_2} g_2(u, v), \quad \det \begin{pmatrix} n_1 & m_1 \\ n_2 & m_2 \end{pmatrix} \neq 0, g_2(0, 0) \neq 0, \\
 & \vdots \\
 & z_\ell = f_\ell(z_1) + u^{n_\ell} v^{m_\ell} g_\ell(u, v), \quad \det \begin{pmatrix} n_1 & m_1 \\ n_\ell & m_\ell \end{pmatrix} \neq 0, g_\ell(0, 0) \neq 0, \\
 & z_{\ell+1} = f_{\ell+1}(z_1), \\
 & \vdots \\
 & z_N = f_N(z_1),
 \end{aligned} \right. \\
 & \text{ここで, } f_j = \sum g_{jn} z^{\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_n \geq 1, \\
 & n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_\ell, \quad m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_\ell, \\
 & \text{また, } \pi^{-1}(p) \text{ の } \alpha \text{ (座標近傍の中心) が divisors の交点の時} \\
 & (n_1, m_1 \neq 0 \text{ である}), \quad 0 < \left| \frac{n_2}{n_1} - \frac{m_2}{m_1} \right| < 1 \text{ である.}
 \end{aligned}$$

そこで右図のように,  $\pi^{-1}(p)$  の近傍を適当に分割 (divisors の交点の近傍の分割の図は全くあやしい) した時, それの与える  $U^*$  の分割が, (1), (2) の  $W_j$  達である.



divisors の交点の近傍の部分の  $W_j$  が  $W(+)$  と quasi-isometric

( $c = \min\{\frac{n_2}{n_1}, \frac{m_2}{m_1}\}$ ,  $\tilde{c} = \max\{\frac{n_2}{n_1}, \frac{m_2}{m_1}\}$ ,  $b = \tilde{c} - c$ ) であり, そうだね

い点の近傍の部分の  $W_j$  が  $W(-)$  と quasi-isometric (この時,

$n_1 = 0$  or  $m_1 = 0$  である:  $n_1 = 0$  ならば  $c = \frac{m_2}{m_1}$ ,  $m_1 = 0$  ならば

$$C = \frac{n_2}{n_1} ) \quad \& \quad 123.$$

## REFERENCES

- [1] J.Cheeger : On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds, Proc. Sym. Pure Math., Providence, 36(1980), 91-146.
- [2] —, M.Goresky & R.MacPherson :  $L^2$ -cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties, Ann. Math. Studies, 102(1982), 303-340.
- [3] M.Goresky & R.MacPherson : Intersection homology theory, Topology, 19(1980), 135-162.
- [4] W.C.Hsiang & V.Pati :  $L^2$ -cohomology of normal algebraic surfaces I, Invent. Math., 81(1985), 395-412.
- [5] M.Nagase :  $L^2$ -cohomology and intersection homology of stratified spaces, Duke Math. J., 50(1983), 329-368.
- [6] — : Sheaf theoretic  $L^2$ -cohomology, Advanced Studies in Pure Math. Vol.8 (Complex Analytic Singularities), (1986), 273-279.
- [7] — : On the heat operators of cuspidally stratified Riemannian spaces, Proc. Japan Acad., 62(1986), 58-60.
- [8] — : On the heat operators of normal singular algebraic surfaces, to appear in J. Diff. Geometry (1988).
- [9] — : Remarks on the  $L^2$ -cohomology of singular algebraic surfaces, preprint(1987).